Лекция 3. Дискретті Фурье түрлендіруі.

f(x) – *[0,l]* анықталған үздісіз функция болсын.

f_q , q= 0,1,…,N-1, $x0=0$, $xN=l$.

Функция периодты түрде бүкіл сандар сызығына жалғастырайық

f(l)=f(0), тор нүктелері: xq=qh=ql/N.

Торда Фурье қатарына жіктеу формуласы бойынша периодты функция үшін келесі теңдеу орындалады:

$$f(x_q) = f_q = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(\frac{-i2\pi n x_q}{l}\right).$$ n=Np+r болсын,

$p \in Z$, r=0,…N-1. Онда бұл қосынды келесі түрде жазылады:

$$\sum_p \sum_r c_n \exp\left(-i\frac{2\pi(np+r)x_q}{l}\right) = \sum_p \sum_r c_n \exp\left(-i\frac{2\pi(Np+r)ql/N}{l}\right) =$$

$$\sum_p \sum_r c_{Np+r} \exp\left(-i\frac{2\pi rq}{N}\right)\exp(-i2\pi qp) = \sum_{r=0}^{N-1} A_r \exp\left(-i\frac{2\pi rq}{N}\right),$$

Бұл жерде Ar дегеніміз $A_r = \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_{Np+r}$

Осыдан, егер функция өзінің дискетті мәндерімен берілсе, онда бұл функцияны келесі торлық функциялар жүйесі арқылы жіктеуге болады

$$\varphi_r(x_q) = \exp\left(-\frac{2\pi q}{N}\right) = \exp\left(-\frac{2\pi x_q}{l}\right), \quad q = 0,1,\ldots, N-1.$$

Осы сиякты, cos(xq) және sin(xq) бойынша да жіктеуге болады.

.

$\varphi_s(x_q)$ функцияларды ортогоналдығаn дәлелдейік.

f(xq) және $\varphi_s(x_q)$ скаляр көбейтіндісінн есептейік:

$$f(x_q) = \sum_{r=0}^{N-1} A_r \exp\left(+i\frac{2\pi rq}{N}\right) \Bigg| \cdot \frac{1}{N}\exp\left(-i\frac{2\pi qs}{N}\right), \quad s = 0,\ldots N-1$$

$$(\mathrm{f}, \varphi_{\mathrm{s}}) = \sum_{q=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} A_n\left[\exp\left(i\frac{2\pi(n-s)}{N}\right)\right]^q.$$

егер s≠n, онда

$$\sum_{q=0}^{N-1}\left[\exp\left(i\frac{2\pi(n-s)}{N}\right)\right]^{q}=\frac{1-\exp\left(\frac{2\pi i(n-s)}{N}\right)^{N}}{1-\exp\left(\frac{2\pi i(n-s)}{N}\right)}=\frac{1-\exp(2\pi i(n-s))}{1-\exp\left(\frac{2\pi i(n-s)}{N}\right)}=\frac{0}{\dots}=0,$$

$(f,\varphi_s)=A_s$, болғандықтан, кері айналдыру формуласы қорытылды:

$$A_s=\frac{1}{N}\sum_{q=0}^{N-1}f_q\cdot\exp\left(-i\frac{2\pi qs}{N}\right)$$

Және $\langle\varphi_s,\varphi_s\rangle=N,\ \ \|\varphi_s\|=\sqrt{N}.$ екенін де дәлелдедік